MA1 Domácí úkol 7 - diferenciální rovnice - řešení.

1. Najděte řešení diferenciální rovnice $y' = \dfrac{y-1}{2\sqrt{1-x}}$, které splňuje počáteční podmínku

   a) $y(0)=0$; b) $y(2)=1$.

Danou rovnici můžeme řešit separací proměnných :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \cdot (y-1), \text{ tj. } y' = f(x).g(y), \text{ kde}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$ je spojitá (a definovaná) v intervalu $(-\infty, 1)$, a $g(y) = y-1$ je definovaná a spojitá v R; rovnice je navíc lineární, tedy víme (díky existenční větě), že každou počáteční podmínkou $y(x_0)=y_0$, kde $x_0 \in (-\infty,1)$, $y_0 \in R$ je dáno jediné řešení dané rovnice (tj. existuje jediné řešení rovnice, které splňuje danou počáteční podmínku).

(i) Tedy, počáteční úloha b) nemá řešení.

(ii) <u>Obecné řešení dané rovnice :</u> $x \in (-\infty, 1)$

a) $\underline{g(y) = 0} \iff y = 1$, tedy $y(x) = 1, x \in (-\infty, 1)$ je stacionární řešení dané rovnice ;

b) $\underline{y(x) \neq 1}$ pro $x \in (-\infty, 1)$; separací dostaneme pro $x \in (-\infty,1)$:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\, dx$$

$$\ln|y-1| = -\sqrt{1-x} + c, \quad c \in R$$

$$|y-1| = e^{-\sqrt{1-x}} \cdot e^{c} \quad \text{a pak}$$

$$(*) \qquad y(x) = 1 + K e^{-\sqrt{1-x}}, \quad \text{kde } K = e^{c}, \text{ nebo } K = -e^{c},$$
tj. $K \neq 0$

z a), b) máme "obecné řešení":

$$\underline{y_{ob}(x) = 1 + K e^{-\sqrt{1-x}}, \quad x \in (-\infty, 1),\ K \in R}$$

Poznámka k (*) – „odstranění" absolutní hodnoty u $|y(x)-1|$:

funkce $(y(x)-1)$ je spojitá v $(-\infty,1)$ (řešení diferenciální rovnice je funkce, která má vlastní derivaci, tedy je spojitá v tom intervalu, kde je řešením), $y(x)\neq 1$, tj. $(y(x)-1)\neq 0$ v $(-\infty,1)$, tedy buď $(y(x)-1)>0$ v $(-\infty,1)$ nebo $(y(x)-1)<0$ v $(-\infty,1)$; tedy

pro $y(x)-1>0$, $x\in(-\infty,1)$ je $|y(x)-1| = y(x)-1$, pak

$$y(x)-1 = e^{-\sqrt{1-x}}\cdot e^{C} \Rightarrow y(x) = 1 + e^{C}\cdot e^{-\sqrt{1-x}}$$

tj. $\underline{K = e^{C}}$,

a pro $y(x)-1<0$, $x\in(-\infty,1)$ je $|y(x)-1| = -(y(x)-1)$, pak

$$-(y(x)-1) = e^{C}\cdot e^{-\sqrt{1-x}} \Rightarrow y(x) = 1 - e^{C} e^{-\sqrt{1-x}},$$

tj. $\underline{K = -e^{C}}$

(iii) Řešení počáteční úlohy a) $y(0)=0$:

„hledáme" konstantu K, tak, aby $y(0)=0$, tj. aby

$$0 = 1 + K e^{-1} \Rightarrow \underline{K = -e};$$

tedy

$$\underline{y_{poč}(x) = 1 - e^{1-\sqrt{1-x}}, \quad x\in(-\infty,1)}$$

2. Vypočítejte (a načrtněte graf) řešení diferenciální rovnice $y'+\frac{x}{y}=0$, které splňuje počáteční podmínku

a) $y(1)=3$; b) $y(-1)=-1$; c) $y(2)=0$.

Danou rovnici lze řešit (opět) separací proměnných, neboť

$$\frac{dy}{dx} = -x\cdot\frac{1}{y};$$

$x\in R$, $y\neq 0$; tedy počáteční podmínku lze volit: $y(x_0)=y_0$, $x_0\in R$, $y_0\neq 0$;

(i) a separací „máme“: $\int y\,dy = -\int x\,dx$, tak

$\int 2y\,dy = -\int 2x\,dx$, a tedy (integrací)

$y^2 = -x^2+c$, tj.

(*) $x^2+y^2=c$, a odtud vidíme, že zde konstanty c „nemohou“ být jiné kladné, tj. $c>0$ ($y\neq 0$),

a pak lze řešení vyjádřit:

buď $y(x)=\sqrt{c-x^2}$, $x\in(-\sqrt{c},\sqrt{c})$ $(c-x^2>0)$

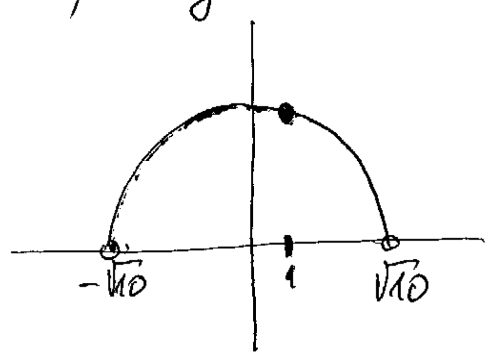
nebo $y(x)=-\sqrt{c-x^2}$, $x\in(-\sqrt{c},\sqrt{c})$;

(ii) řešení počátečních úloh:

a) $y(1)=3$: zde $x_0=1$, $y_0=3$, a opět, řešení je „dáno“, tedy najdeme konstantu, ale zde ještě musíme „vybrat“ dle hodnoty y_0 (>0, nebo <0) příslušné řešení; zde z (*)

$c = x_0^2+y_0^2 = 1^2+3^2 = 10$, a $y_0=3>0$, tedy

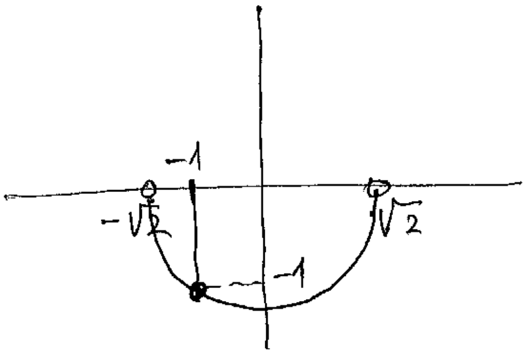
$y_{poč}(x)=\sqrt{10-x^2}$, $x\in(-\sqrt{10},\sqrt{10})$



b) $y(-1)=-1$: zde $x_0=-1$, $y_0=-1$, pak

$$c = x_0^2+y_0^2 = (-1)^2+(-1)^2 = 2,$$ a řešení je

$(y_0=-1<0)$ $$y_{\text{př}}(x) = -\sqrt{2-x^2}, \quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$



c) $y(2)=0$ – tato počáteční úloha nemá řešení, neboť z tvaru diferenciální rovnice vidíme, že $y(x)\neq 0$!

3. Najděte ta řešení diferenciální rovnice $y' = 2x\,(1-y)$, která splňují podmínku

i) $y(0)=0$, ii) $y(0)=1$, iii) $y(0)=2$. Načrtněte jejich grafy.

Zde – opět rovnice, kterou lze řešit separací proměnných, navíc, daná rovnice je lineární, tedy platí, že každou počáteční podmínkou, kde $x_0 \in R$, $y_0 \in R$ je dáno jediné řešení $y(x)$, definované v R.

(i) $\underline{g(y)=0} \Leftrightarrow 1-y=0 \Leftrightarrow \underline{y=1}$, tedy

$\underline{y(x)=1,\ x\in R}$ je stacionární řešení dané rovnice

(ii) $\underline{y(x)\neq 1 \text{ v } R}$: separace:

$$\int \frac{dy}{1-y} = \int 2x\,dx, \text{ tedy}$$

$$-\ln|y-1| = x^2+\tilde{C}, \quad \tilde{C}\in R,\ x\in R$$

$$\ln|y-1| = -x^2+C, \quad C=-\tilde{C}\in R$$

$$|y-1| = e^{C}\cdot e^{-x^2}, \quad C\in R, \text{ a pak}$$

$$\underline{y(x) = 1+Ke^{-x^2}}, \quad K\neq 0 \quad (K=e^{C} \text{ nebo } K=-e^{C})$$

(viz poznámka o odstranění absolutní hodnoty – příklad 1)

(iii) a „přidáme-li" k výsledku z (ii) ještě stacionární řešení z (i), dostaneme obecné řešení dané rovnice

$$\underline{y_{ob}(x) = 1+Ke^{-x^2}, \quad K\in R,\ x\in R};$$

($K=0$ „odpovídá" stacionárnímu řešení (z (i)) $y(x)=1, x\in R$)

(iv) <u>řešení úloh počátečních</u>

(opět – počáteční podmínka „určí" konstantu K):

a) $\underline{y(0)=0:}$ $\quad 0 = 1 + K \Rightarrow K = -1$ a pak

$$\underline{y_{poč}(x) = 1 - e^{-x^2}, \ x \in R;}$$

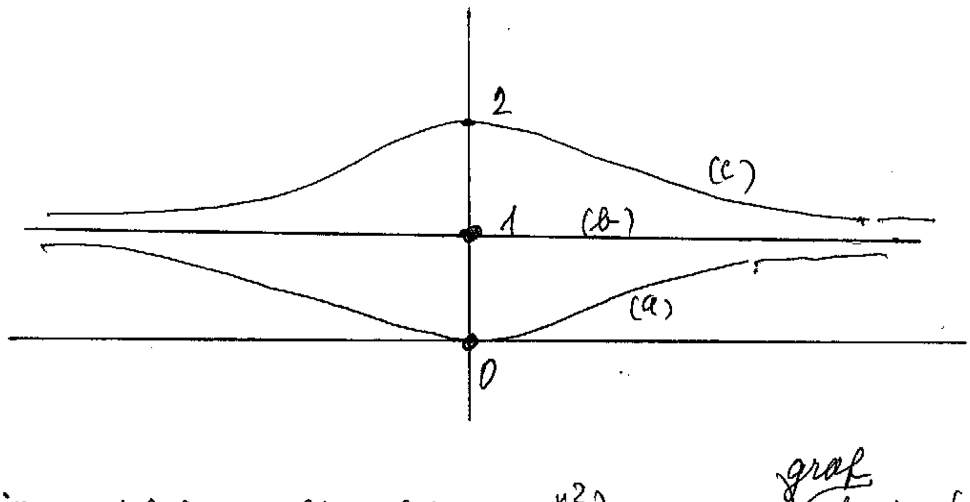
b) $\underline{y(0)=1:}$ $\quad$ stacionární řešení $\underline{y_{stac}(x) = 1, \ x \in R}$

c) $y(0)=2:$ $\quad 2 = 1 + K \Rightarrow K = 1$ a pak

$$\underline{y_{poč}(x) = 1 + e^{-x^2}, \ x \in R}$$

<u>Náčrt grafů řešení:</u>

(základ náčrtku je graf funkce $y = e^{-x^2}$, pak, je-li $y(x) = 1 + Ke^{-x^2}$, $K \neq 0$, graf se „změní" násobením konstantou K a pak posuneme graf fce $y = Ke^{-x^2}$ o „1" ve směru osy y)



$$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (1 + Ke^{-x^2}) = 1,$$ tj. graf stacionárního řešení je asymptotou grafů všech řešení nestacionárních řešení

4. Najděte řešení diferenciální rovnice $y' + \frac{x}{1+x^2}\, y = x$, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 1$.

Daná rovnice je lineární diferenciální rovnice 1. řádu „typu“ $y' + p(x)y = f(x)$, kde $p(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $f(x) = x$, $p(x)$ i $f(x)$ jsou spojité v R, tedy ke každé počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$, kde $x_0 \in R$, $y_0 \in R$, existuje právě jedno řešení dané rovnice, tuto podmínku splňující. Řešíme („dle návodu obecného“) nejprve rovnici homogenní (tj. $f(x) = 0$), a pak užijeme metodu „variace konstant“ pro nalezení řešení rovnice „celé“:

a) <u>řešení homogenní rovnice:</u> $y' + \frac{x}{1+x^2}\, y = 0$ –

– řešíme separací proměnných:

(i) $y(x) = 0$, $x \in R$ – stacionární řešení

(ii) $y(x) \neq 0$, $x \in R$:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \ , \ c \in R$$

$$|y| = e^{c} \cdot e^{\ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$y = K \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ , \ K \neq 0, \ x \in R$$

a opět z (i) a (ii) „dohromady“ máme obecné řešení rovnice homogenní (stacionární řešení „odpovídá“ $K = 0$)

$$y_H(x) = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} \ , \ K \in R, \ x \in R$$

b) <u>řešení nehomogenní rovnice užitím „variace konstant"</u>:

řešení „hledáme" ve tvaru (*) $y(x) = K(x)\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in R$;

řešení „má" splňovat danou rovnici, tedy hledáme funkci $K(x)$ tak, aby v R platilo:

$$\left(K(x)\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)' + \frac{x}{1+x^2}\cdot K(x)\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = x$$

Tedy:
$$K'(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \cancel{K(x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}\cdot 2x + \frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}K(x)} = x$$

a dostaneme rovnici pro $K'(x)$: $K'(x) = x\cdot\sqrt{1+x^2}$, $x \in R$,

a integrací: $\underline{K(x)} = \int x\sqrt{1+x^2}\,dx \underset{1VS}{=} \frac{1}{2}\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3\cdot\frac{2}{3} + C = \underline{\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 + C},\quad C \in R$$

a tedy obecné řešení dané rovnice je (dosadíme do (*))

$$\underline{y_{ob} = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}(1+x^2)\,,\quad x \in R,\ C \in R}$$

(a vidíme, že $y_{ob} = y_H + y_P$, kde $y_P(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)$)

<u>Řešení počáteční úlohy:</u>

$\underline{y(0)=1}$, tj. $1 = C + \frac{1}{3} \Rightarrow C = \frac{2}{3}$ a pak

$$\underline{y_{poč}(x) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}(1+x^2)\,,\quad x \in R}$$

5. Najděte řešení diferenciální rovnice $y' - \frac{1}{\sqrt{1-x}} y = 1$, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 1$.

Daná rovnice je opět lineární diferenciální rovnice 1. řádu $y' + p(x)y = f(x)$, tedy $p(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, definovaná a spojitá v intervalu $(-\infty, 1)$, a $f(x) = 1$, spojitá v $(-\infty, 1)$, tedy, pro libovolnou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (-\infty, 1)$, $y_0 \in R$, existuje právě jedno řešení příslušné počáteční úlohy. Řešíme opět nejprve rovnici homogenní, a pak užijeme metodu variace konstant.

a) <u>řešení homogenní rovnice</u> $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} y$, $x \in (-\infty, 1)$:
(„podobně" příkladu 1 zde)

(i) $y(x) = 0$, $x \in (-\infty, 1)$ – stacionární řešení;

(ii) $y(x) \neq 0$, $x \in (-\infty, 1)$, pak separací máme

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx, \text{ tj.}$$

$$\ln|y| = -2\sqrt{1-x} + c, \quad c \in R \quad \text{a}$$

$$|y| = e^{c} e^{-2\sqrt{1-x}} \quad \text{(a odstraněním abs. hodnoty)}$$

$$y = K e^{-2\sqrt{1-x}}, \quad K \neq 0, \quad x \in (-\infty, 1)$$

a (i) a (ii) dají „dohromady" obecné řešení

$$\underline{y_H(x) = K e^{-2\sqrt{1-x}}, \quad K \in R, \quad x \in (-\infty, 1)}$$

b) Variace konstant – na další straně:

Variace konstant (teď už „rychleji" – „opakování" bylo v minulém příkladu):

řešení „celé" rovnice hledáme ve tvaru $y(x) = K(x)\, e^{-2\sqrt{1-x}}$,
$x \in (-\infty, 1)$

tak, aby
$$\left(K(x) e^{-2\sqrt{1-x}}\right)' - \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot K(x) e^{-2\sqrt{1-x}} = 1 \quad v\ (-\infty, 1),$$

tedy
$$K'(x) e^{-2\sqrt{1-x}} + \cancel{K(x) e^{-2\sqrt{1-x}} \cdot \frac{-2(-1)}{2\sqrt{1-x}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{1-x}} K(x) e^{-2\sqrt{1-x}}} = 1$$

tj: $\underline{K'(x)\, e^{-2\sqrt{1-x}} = 1}$, a pak $\underline{K(x) = \int e^{2\sqrt{1-x}}\, dx,\ x \in (-\infty, 1)}$

Výpočet:
$$\int e^{2\sqrt{1-x}}\, dx \underset{2VS}{=} \left| \begin{array}{l} 2\sqrt{1-x} = t \\ x = 1 - \frac{t^2}{4} \\ dx = -\frac{t}{2}\, dt \end{array} \right| = -\frac{1}{2} \int t e^t\, dt \underset{PP}{=}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(t e^t - e^t\right) + c = -\frac{1}{2} e^{2\sqrt{1-x}} \left(2\sqrt{1-x} - 1\right) + c =$$
$$= \frac{1}{2} e^{2\sqrt{1-x}} \left(1 - 2\sqrt{1-x}\right) + c$$

tedy $K(x) = \frac{1}{2}\left(1 - 2\sqrt{1-x}\right) \cdot e^{2\sqrt{1-x}} + c$, $c \in \mathbb{R}$, $x \in (-\infty, 1)$

a $\underline{y_{oř}(x) = c\, e^{-2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2}\left(1 - 2\sqrt{1-x}\right),\ x \in (-\infty, 1),\ c \in \mathbb{R}}$

<u>a počáteční úloha:</u> $y(0) = 1$: $1 = c\, e^{-2} - \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{3}{2} e^{2}$,

tedy $\underline{y_{poč}(x) = \frac{3}{2} e^{2(1-\sqrt{1-x})} + \frac{1}{2}\left(1 - 2\sqrt{1-x}\right),}$

$\underline{x \in (-\infty, 1)}$